Physicité

L'oscillateur harmonique

The career of a young theoretical physicist consists of treating the harmonic oscillator in ever-increasing levels of abstraction.
– Sidney Coleman

L'oscillateur harmonique touche à toute la physique. Comme vous le verrez dans les exemples, cela nous amènera à examiner de nombreux domaines, thermodynamique des trous noirs, optique, biophysique, électrocinétique, électrodynamique quantique et bien sûr, mécanique. Il s'agit de regarder les systèmes physiques proches de leurs positions d'équilibre et d'en déduire des propriétés sur ceux-ci. Shall we ?

1 Stabilité des équations différentielles

Les systèmes physiques sont régis par des équations différentielles. Il est donc naturel qu'on s'intéresse à la stabilité des quantités régies par des équations différentielles, parce que c'est le langage de la physique. Ici, x est une quantité quelconque, cela peut-être la position, la vitesse, la concentration, le potentiel, l'angle... On va s'intéresser surtout à de la stabilité temporelle, d'où la notation $\dot{x}(=\frac{dx}{dt})$, mais cela s'applique à toutes les dépendances (comme la position).

On se restreindra aux équations suivantes, qui sont celles qu'on rencontre presque tout le temps en physique :

$$\dot{x} = f(x) \tag{1}$$

Équation différentielle d'ordre 1, et

$$\ddot{x} = f(x) \tag{2}$$

Équation différentielle d'ordre 2.

Où f est une fonction quelconque.

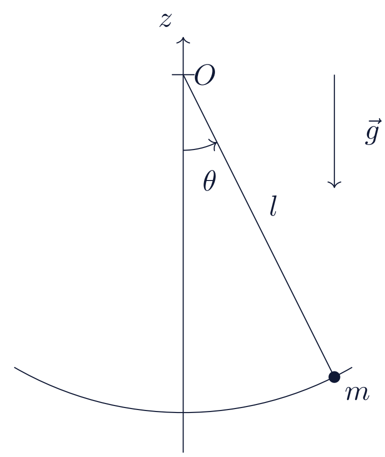
1.1 Positions d'équilibre

Quelles sont les positions d'équilibre ? Comment les trouver ? Et bien un position d'équilibre est un endroit où l'on peut rester indéfiniment. C'est-à-dire une position telle qu'il n'y ait pas de mouvement. En ce point, on doit donc avoir $\boxed{\dot{x} = 0 \text{ et } \ddot{x} = 0}$.

Une position d'équilibre est un zéro de f, c'est-à-dire un point où f passe par l'axe des abscisses.

Exemples :

Pendule simple :



L’équation du pendule simple est :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$$

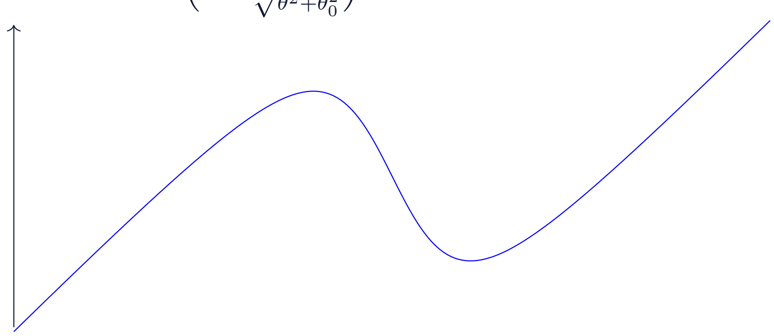
Donc les deux positions d’équilibre sont les θ_{eq} tels que $\frac{g}{l}\sin(\theta_{eq}) = 0$. Donc$\sin(\theta_{eq}) = 0$, c’est-à-dire $\theta_{eq} = 0$ ou $\theta_{eq} = \pi$. On attendait la première position d’équilibre, mais $\theta = \pi$ est plus surprenant. On verra par la suite qu’elle est instable, ce qui est conforme à ce qu’on peut attendre.

Rotation de l’ATP-synthase :

La molécule de l’ATP-synthase est constituée d’une partie immobile, le stator, et d’une partie pouvant se mettre en rotation autour du stator, le rotor. Sa rotation propre est donnée par l’équivalent du principe fondamental de la dynamique (PFD) en rotation, le théorème du moment cinétique :

$$J\ddot{\theta} = \alpha - k\theta\left(1 - \frac{\theta_1}{\sqrt{\theta^2 + \theta_0^2}}\right)$$

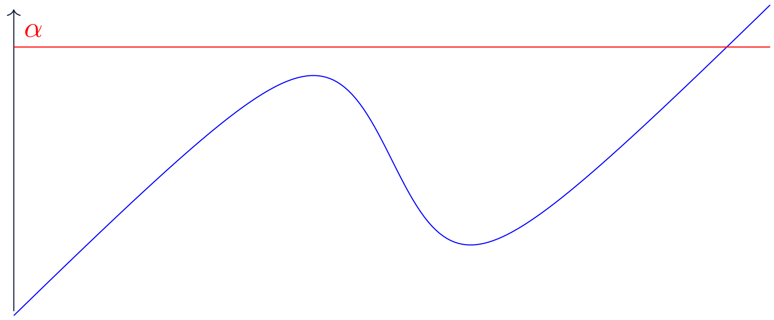
Représentons la fonction $\theta \mapsto k\theta\left(1 - \frac{\theta_1}{\sqrt{\theta^2+\theta_0^2}}\right)$, pour un grand θ_1.



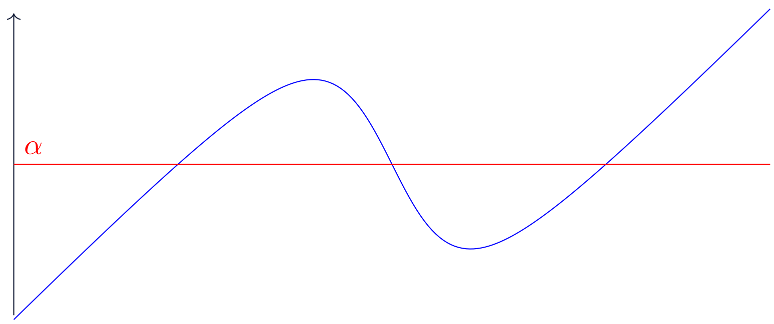
Pour l’équilibre, on veut

$$\alpha = k\theta_{eq}\left(1 - \frac{\theta_1}{\sqrt{\theta_{eq}^2 + \theta_0^2}}\right)$$

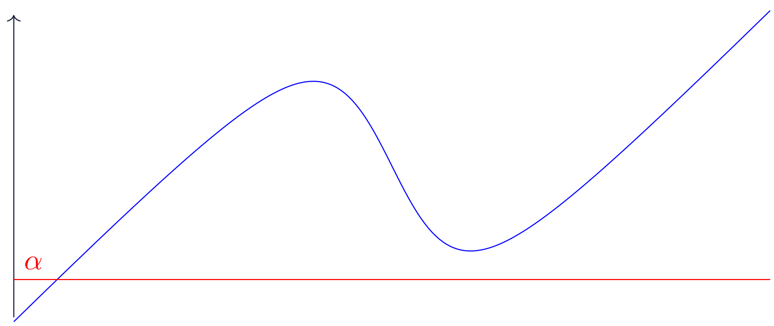
On a donc trois possibilités en fonction de la valeur de α.



Dans ce cas, une position d'équilibre.



Dans celui-ci, trois.



Dans ce dernier, une seule.

1.2 Stabilité des positions d'équilibre

La notion de stabilité est un peu plus fine. L'idée est que si une position est stable, on va y revenir quoi qu'il arrive. Et si elle est instable, au moindre coup de vent on s'en éloignera substantiellement.

On suppose qu'on a une position d'équilibre x_0. La précision parfaite n'existe pas, il y aura donc quoi qu'il arrive des variations autour de cette position : imprécision de l'expérimentateur, coup de vent, agitation thermique, et, si on est vraiment fou, fluctuations quantiques. On note donc ε la petite variation que subit le système autour de sa position d'équilibre.

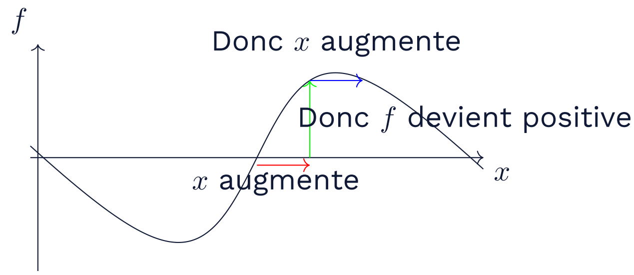
Supposons que f soit croissante.

-Si $\varepsilon > 0$, $x = x_0 + \varepsilon > x_0$, donc $f(x) > f(x_0) = 0$ donc $\dot{x} > 0$ ou $\ddot{x} > 0$. Donc x a tendance à augmenter, donc à s'éloigner d'autant plus de la position d'équilibre.

-Si $\varepsilon < 0$, $x = x_0 + \varepsilon < x_0$, donc $f(x) < f(x_0) = 0$ donc $\dot{x} < 0$ ou $\ddot{x} < 0$. Donc x a tendance à diminuer, donc à s'éloigner d'autant plus de la position d'équilibre.

Propriété 1 : Équilibre instable

Donc si f est localement croissante, la position d'équilibre est instable.



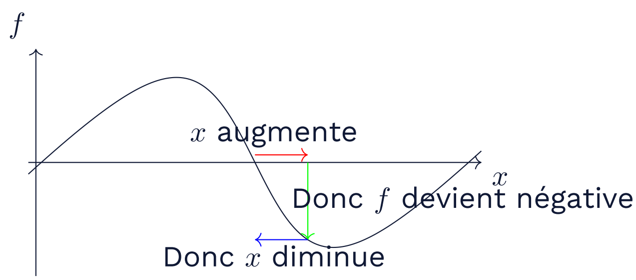
Supposons que f soit décroissante.

-Si $\varepsilon > 0$, $x = x_0 + \varepsilon > x_0$, donc $f(x) < f(x_0) = 0$ donc $\dot{x} < 0$ ou $\ddot{x} < 0$. Donc x diminue, donc se rapproche de x_0.

-Si $\varepsilon < 0$, $x = x_0 + \varepsilon < x_0$, donc $f(x) > f(x_0) = 0$ donc $\dot{x} > 0$ ou $\ddot{x} > 0$. Donc x augmente, donc se rapproche de x_0.

Propriété 2 : Équilibre stable

Donc si f est localement décroissante, la position d'équilibre est stable.



Ces résultats ne sont pas à connaître par cœur, mais les raisonnements et les dessins sont à savoir refaire.

Exemples :

Pendule simple :

On reprend l'équation du pendule simple :

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin(\theta)$$

$\sin$ est croissante au voisinage de 0, et décroissante au voisinage de π. $\theta = 0$ est donc une position d'équilibre stable, et $\theta = \pi$ est une position d'équilibre instable. Ces deux résultats sont attendus.

Pour $\theta = \pi$, si θ diminue un peu, le poids a une composante non-nulle négative selon $\vec{u}_\theta$, donc le poids a tendance à faire diminuer θ, ce qui fait tomber la masse.

Pour $\theta = 0$, si θ augmente un peu, le poids a une composante non-nulle négative selon $\vec{u}_\theta$, donc θ a tendance à diminuer.

Équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

L'équation

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

admet 0 pour unique position d'équilibre et est stable pour $k \leqslant 0$, instable pour $k > 0$.

Rotation de l'ATP-synthase :

La pente de la fonction de droite dans

$$J\ddot{\theta} = \alpha - k\theta\left(1 - \frac{\theta_1}{\sqrt{\theta^2 + \theta_0^2}}\right)$$

est l'opposée de la pente de la fonction bleue. La monotonie d'une fonction est reliée au signe de sa pente (par la dérivée). La solution de gauche, quand elle existe, est donc stable. Celle du milieu, quand elle existe est instable. Et celle de droite, quand elle existe, est stable.

Thermodynamique des trous noirs (IPhOs, Liban 2007) :

On peut montrer que la masse d'un trou noir, à l'équilibre entre son rayonnement propre et le rayonnement du fond diffus cosmologique, vérifie

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{hc^4}{16G^2}\frac{1}{m^2}\left(1 - \frac{m^4}{m^{*4}}\right)$$

On se demande alors, les trous noirs ont-ils tendance à s'évaporer ou à se stabiliser ? (question légitime)

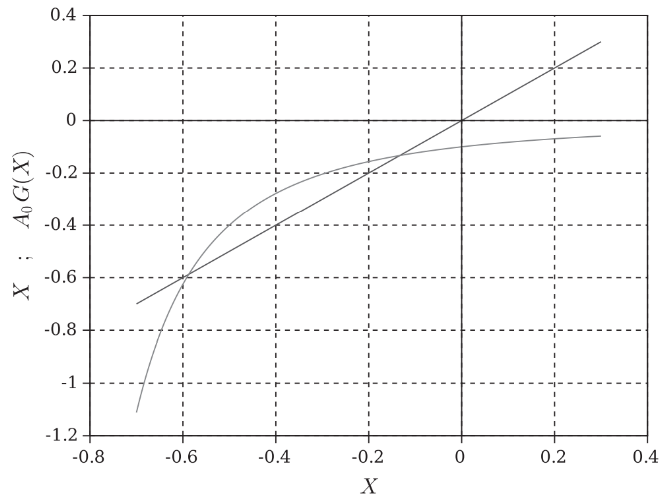
On remarque que m^* est clairement la seule position d'équilibre de la masse. Si $m > m^*$, on remarque que $\frac{dm}{dt} > 0$, donc on s'éloigne de m^*. De même, si $m < m^*$, $\frac{dm}{dt} > 0$, donc on s'éloigne encore de m^*. C'est donc un équilibre instable ! Reste à savoir s'ils ont tendance à s'évaporer ou à engloutir tout l'univers...

X Physique SI 2017 :

En étudiant un transducteur électroacoustique, on est ramené à l'équation différentielle :

$$\alpha\ddot{X} = A_0 G(X) - X$$

On représente la fonction A_0G ainsi que la droite $Y = X$:



Les positions d'équilibre sont les croisements de ces deux courbes. Pour la première position d'équilibre, la pente de $A_0G(X)$ est plus grande que celle de X, donc $A_0G(X) - X$ est croissante, donc la position est instable. Pour la deuxième position d'équilibre, c'est l'inverse, elle est donc stable.

2 Comportement des sytèmes physiques au voisinage d'une position d'équilibre

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit, en une dimension,

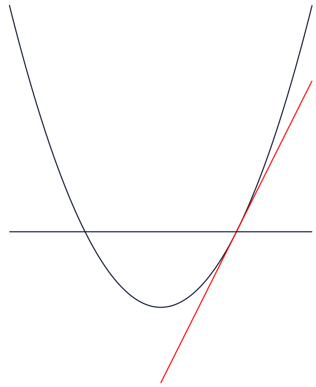
$$m\ddot{x} = F \tag{3}$$

On se limitera donc dans cette partie à des équations de cette forme. Nous voulons aussi écrire que F est une fonction de x, pour se ramener aux cas étudiés précédemment. Ce n'est pas toujours possible. En effet si on prend un élastique, et qu'on tire dessus si fort qu'on le distend, au retour il n'exercera pas la même force qu'à l'aller, puisque ses caractéristiques physiques ont été modifiées entre l'aller et le retour. Cependant, suffisamment proche d'une position d'équilibre, c'est possible.

Nous voulons savoir comment un système physique se comporte lorsqu'il est un tout petit peu perturbé par rapport à sa position d'équilibre. Nous nous fichons de tout connaître sur le système, nous voulons seulement son **comportement** (donc quelque chose d'approximatif) au voisinage d'une position d'équilibre, puisque comme on l'a vu plus haut, c'est le comportement local qui nous renseigne sur la stabilité. Cette approche est d'autant plus valable que, si la position d'équilibre est stable, on sait que l'on reste proche de celle-ci, donc on l'approximation au voisinage de la position d'équilibre reste vraie. Nous nous permettons donc d'approximer la force par sa tangente en la position d'équilibre. Puisqu'on veut avoir $\ddot{x} = 0$, pour une position d'équilibre x_0, on a $F(x_0) = 0$. On écrit donc

$$m\ddot{x} \approx \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x=x_0} (x - x_0) \tag{4}$$

Il s'agit simplement de l'équation de la tangente à F en x_0.



Et comme on l'a vu plus tôt, la monotonie de F au voisinage de x_0, c'est-à-dire le signe de $\left.\frac{dF}{dx}\right|_{x=x_0}$, nous renseigne sur la stabilité de la position d'équilibre. Plutôt que de systématiquement dériver, ce qui peut être technique et long à faire, nous allons apprendre un moyen efficace de linéariser des fonctions, les développements limités.

2.1 Développement Limités (DLs)

Faire un DL, c'est approximer localement une fonction par un polynôme. Un DL à l'ordre n, c'est approximer une fonction par un polynôme de degré n. Nous ferons essentiellement des DLs à l'ordre 1, c'est-à-dire linéariser. Le principe est donc exactement ce qu'on a vu, c'est regarder localement ce qui se passe pour une fonction donnée, et en donner l'équation de la tangente. Simplement la méthode est autre que la dérivation (mais donne heureusement le même résultat). On commence par donner les DLs de fonctions usuelles au voisinage de 0, pour une variable x **adimensionnée**.

Fonction	DL à l'ordre 1 en 0
e^x	$1+x$
$\ln(1+x)$	x
$(1+x)^\alpha$	$1+\alpha x$
$\cos(x)$	1
$\sin(x)$	x

Il peut être utile de connaître le DL à l'ordre 2 de cos : $\cos(x) \underset{x\ll 1}{=} 1-\frac{x^2}{2}$

Comment savoir si on est suffisamment proche de 0 ? Les fonctions citées varient sur une échelle typique de l'ordre de l'unité, il faut donc avoir $\boxed{x \ll 1}$. Petit comment ? Cela dépend de la précision de l'expérience. Mais on sait désormais à quoi comparer x pour faire une approximation. Ce qui l'est important de comprendre c'est que **plus on monte dans les ordres, et plus les termes sont petits**. En effet, $x \underset{x\ll 1}{\ll} 1$, donc $x^{n+1} \underset{x\ll 1}{\ll} x^n$.

Méthode 1 : Calcul des DLs adimensionnés au voisinage de 0

On utilise les DLs usuels pour obtenir une somme de produits de fonctions linéarisées. Les DLs se composent, se multiplient et s'additionnent naturellement. Puisque l'on fait une linéarisation, on néglige tous les termes avec des puissances de x plus grandes que 1.

Exemple :

$$\begin{aligned}(1+x)^{\beta}e^{(1+x)^{\alpha}} &\underset{x\ll 1}{=} (1+\beta x)e^{1+\alpha x}\\ &= (1+\beta x)e \times e^{\alpha x}\\ &= e\times(1+\beta x)(1+\alpha x)\\ &= e\times(1+(\beta+\alpha)x)\end{aligned}$$

Pour plus d'entraînement, voir exercice 1.

On considère maintenant une fonction quelconque, au voisinage d'un point quelconque, qui peut avoir une dimension.

Méthode 2 : Méthode de calcul des DLs dimensionnés au voisinage d'un point quelconque

On fabrique un paramètre adimensionné $x_0 \ll 1$. On se ramène alors au cas des DLs adimensionnés au voisinage de 0.

Exemple :

Champ gravitationnel au voisinage de la surface de la Terre :

Nous sommes, comme vous le savez, très loin du noyau de la Terre, ce qui fait qu'à notre échelle, le champ gravitationnel varie à peine. Si l'on veut estimer la manière dont il varie, on peut faire un DL. Cela nous donnera la pente de sa variation.

On crée une variable adimensionnée très petite devant 1, en l'occurence $\frac{z-R_T}{R_T} = \frac{h}{R_T}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(h) &= -\frac{GM_T}{(R_T+h)^2}\\ &= -\frac{GM_T}{R_T^2}\left(1+\frac{h}{R_T}\right)^{-2}\\ &\underset{\frac{h}{R_T}\ll 1}{=} -\frac{GM_T}{R_T^2}\left(1-2\frac{h}{R_T}\right)\end{aligned}$$

Pour qu'il diminue d'1%, il faut donc se placer à une hauteur h telle que

$$\frac{2h}{R_T} = 1\%$$

$$h \approx 32\text{km}$$

L'approximation d'un $\mathcal{G}$ uniforme est donc très bonne à notre échelle. On sait aussi qu'en valeur absolue, on surestime le champ de gravitation.

Bille sur un anneau en rotation :

Vous établirez en exercice (N°23) l'équation différentielle d'une bille astreinte à se déplacer sur un anneau en rotation à la vitesse angulaire Ω :

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{R}\sin(\theta) + \Omega^2\sin(\theta)\cos(\theta)$$

Il y a, pour $\Omega > \Omega_c = \sqrt{\frac{g}{R}}$, 4 positions d'équilibre, 0, π et $\theta_{eq\pm} = \pm$arcos$\left(\frac{\Omega_c^2}{\Omega^2}\right)$. On va s'intéresser à la stabilité de θ_{eq+}. On fera un DL à l'ordre 1 du terme de droite de l'équation différentielle pour savoir si cette position est stable ou non, et puisque c'est une position d'équilibre, on ne s'embêtera pas à calculer le terme constant, puisqu'on sait qu'il s'annule. On pose $\varepsilon = \theta - \theta_{eq+} \ll 1$. Cela va nous donner l'occasion d'apprendre à faire le DL à l'ordre 1 de fonctions trigonométriques en un point quelconque. On a deux possibilités : soit on utilise les formules d'addition de cosinus et de sinus : $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ et $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$, cela nous permet de nous ramener au voisinage de 0, soit on écrit $\cos(\theta+\varepsilon) \approx \cos(\theta) + \cos'(\theta)\varepsilon = \cos(\theta) - \sin(\theta)\varepsilon$. On fait le DL de chaque fonction individuellement avant de réinjecter le tout dans l'équation.

$$\begin{aligned}
\sin(\theta) &= \sin(\theta_{eq+} + \varepsilon) = \sin(\theta_{eq+})\cos(\varepsilon) + \cos(\theta_{eq+})\sin(\varepsilon) \\
&\underset{\varepsilon \ll 1}{\approx} \sin(\theta_{eq+}) + \cos(\theta_{eq+})\varepsilon \\
\cos(\theta) &= \cos(\theta_{eq+} + \varepsilon) = \cos(\theta_{eq+})\cos(\varepsilon) - \sin(\theta_{eq+})\sin(\varepsilon) \\
&\underset{\varepsilon \ll 1}{\approx} \cos(\theta_{eq+}) - \sin(\theta_{eq+})\varepsilon \\
-\frac{g}{R}\sin(\theta) + \Omega^2\sin(\theta)\cos(\theta) &= -\Omega_c^2\sin(\theta) + \Omega^2\sin(\theta)\cos(\theta) \\
&= (\Omega^2\cos(\theta) - \Omega_c^2)\sin(\theta) \\
&\underset{\varepsilon \ll 1}{\approx} (\Omega^2(\cos(\theta_{eq+}) - \sin(\theta_{eq+})\varepsilon) - \Omega_c^2)(\sin(\theta_{eq+}) + \cos(\theta_{eq+})\varepsilon) \\
&= (\Omega^2\cos(\theta_{eq+}) - \Omega_c^2)\cos(\theta_{eq+})\varepsilon - \Omega^2\sin^2(\theta_{eq+})\varepsilon \\
&= (\Omega^2\frac{\Omega_c^2}{\Omega^2} - \Omega_c^2)\cos(\theta_{eq+})\varepsilon - \Omega^2(1 - \cos^2(\theta_{eq+}))\varepsilon \\
&= -\Omega^2\left(1 - \frac{\Omega_c^4}{\Omega^4}\right)\varepsilon
\end{aligned}$$

Et comme $\Omega > \Omega_c$, $\frac{\Omega_c^4}{\Omega^4} < 1$. Donc cette position d'équilibre est stable. On verra juste après que ce DL veut dire qu'au voisinage de cette dernière, le système oscille à la pulsation $\omega = \Omega\sqrt{1 - \frac{\Omega_c^4}{\Omega^4}}$.

Propriété 3 : DL à l'ordre n, formule de Taylor

La formule générale suivante donne le DL à l'ordre n en un point quelconque de n'importe quelle fonction dérivable n fois. Elle n'est pas à connaître et est rarement utile.

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\frac{d^k f}{dx^k}\Big|_{x=a} h^k \tag{5}$$

Il est tout de même important de la connaître à l'ordre 2, car cela intervient dans le DL de l'énergie potentielle :

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2$$

La méthode des DLs peut paraître contre-intuitive initialement, c'est pourquoi il faut en faire beaucoup, et vous avez pour cela un poly d'exos à votre disposition (voir exercices 2 à 5).

2.2 L'équation différentielle $\ddot{x} \pm \omega^2 x = 0$

Maintenant qu'on sait comment se ramener au voisinage d'un point d'équilibre, il faut se demander comment on résout l'équation différentielle qui en découle.

On peut donc mettre le problème sous la forme

$$\ddot{x} \pm \omega^2 x = C \tag{6}$$

+ pour les positions stables, $-$ pour les positions instables.

La méthode pour résoudre une équation linéaire est toujours la même :

Méthode 3 : Résoudre une équation différentielle linéaire

— Trouver la solution particulière x_p, c'est-à-dire la solution de la forme du membre de droite, c'est-à-dire constante. On résout donc pour $\ddot{x} = 0$.

— Trouver la solution x_h de l'équation homogène associée, c'est-à-dire celle où on ne garde que les termes en x, c'est-à-dire $\ddot{x} \pm \omega^2 x = 0$.

À la fin, $x = x_h + x_p$.

— Finalement, on trouve les constantes en utilisant les conditions initiales sur $x(t = 0)$ et $\dot{x}(t = 0)$.

Il ne reste plus qu'à vous donner la solution au problème

$$\ddot{x} \pm \omega^2 x = 0 \tag{7}$$

Propriété 4 : Solutions de l'équation différentielle $\ddot{x} \pm \omega^2 x = 0$

$$\begin{array}{ll} \ddot{x} - \omega^2 x = 0 & x(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} = A' \cosh(\omega t) + B' \sinh(\omega t) \\ \ddot{x} + \omega^2 x = 0 & x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) = A' \cos(\omega t + \phi) \end{array}$$

Remarques :

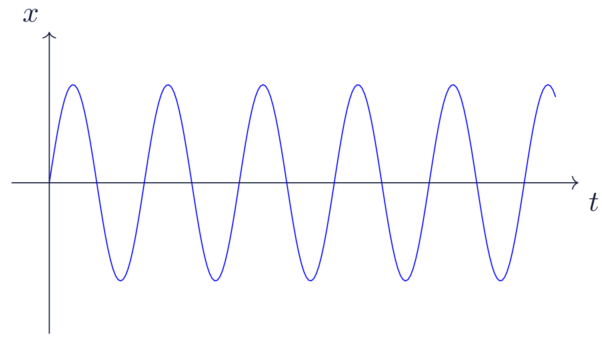
— C'est clairement la deuxième, le cas d'une position stable, qui est la plus importante à connaître.

— On a bien les comportements attendus, la position instable diverge et la position stable reste bornée.

— Les solutions stables sont oscillantes. Ici, on n'a pas modélisé de pertes d'énergie (de frottements), donc cela oscille indéfiniment. Dans la vraie vie, ces oscillations s'atténuent sous l'effet de la dissipation énergétique.

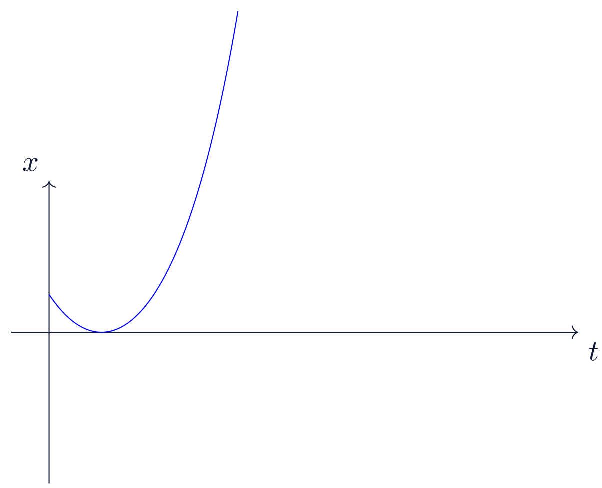
— La fréquence d'oscillation vaut $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$ et la période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

— Les fonctions $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ sont à connaître, car $\cosh'(x) = \sinh(x)$ et $\sinh'(x) = \cosh(x)$, ce qui est pratique car $\sinh(0) = 0$ et $\cosh'(0) = 0$. Cela fait que la fonction $\cosh$ est sensible à la valeur initiale, et $\sinh$ est sensible à la dérivée intiale. $\cosh$ est paire, $\sinh$ est impaire, elles sont donc utiles quand on a un système qui présente des symétries. Il peut être utile de savoir que $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.



Exemple de solution stable

— Les solutions instables divergent, et sortent des proportions typiques du système en un temps typique $\frac{1}{\omega}$



Exemple de solution instable

Cela veut dire qu'en un temps typique de l'ordre de $\frac{1}{\omega}$, l'approximation x très proche de x_{eq} n'est plus valable.

La pulsation ω est dite pulsation propre du système, **elle est caractéristique du système** et ne dépend pas des conditions initiales. C'est pour cela qu'on dit que l'oscillateur est harmonique.

Exemples :

Pendule simple :

L'équation mécanique du pendule simple est

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$$

Désormais, ce genre de choses ne vous fait pas peur ! D'abord, le DL. On arrive à :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

On suppose qu'on part d'une position θ_0 sans vitesse initiale. La pulsation propre du pendule est donc $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Voilà un exemple où la pulsation propre nous renseigne sur des propriétés intrinsèques du système, c'est une partie de l'intérêt de l'oscillateur harmonique. La solution est de la forme

$$\theta(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

Les conditions initiales sont $\theta(t=0) = A = \theta_0$, $\dot\theta(t=0) = B\omega = 0$, donc $A = \theta_0$ et $B = 0$. Finalement,

$$\theta(t) = \theta_0\cos(\omega t)$$

Et vous comprenez comment on peut faire une mesure de g avec un pendule ! La période T des oscillations est $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Quasi-ressort :

On suppose qu'une masse m est soumise à une force de la forme $F(x) = -m\omega_1^2(x - a^4/x^3)$ dans la région $x > 0$. On se retrousse les manches et on y va. Position d'équilibre ? On résout pour $F(x_{eq}) = 0$, on trouve $x_{eq} = a$. On veut savoir si c'est stable ou non, on fait un DL.

$$\begin{aligned} F(x_{eq}+\varepsilon) &= -m\omega_1^2\Big(a+\varepsilon-\frac{a^4}{(a+\varepsilon)^3}\Big) \\ &= -m\omega_1^2\Big(a+\varepsilon-\frac{a}{(1+\varepsilon/a)^3}\Big) \\ &\underset{|\varepsilon|\ll a}{=} -m\omega_1^2\Big(a+\varepsilon-a(1-3\varepsilon/a)\Big) \\ &= -4m\omega_1^2\varepsilon \end{aligned}$$

C'est stable ! C'est aussi une bonne leçon : quand on fait un DL de la force au voisinage de la position d'équilibre, on sait que le terme constant s'annule, on n'a donc pas besoin de le calculer (puisque la force s'annule au niveau d'une position d'équilibre). Au voisinage de la position d'équilibre, on a donc

$$\ddot{x} = \ddot{x}_{eq} + \ddot{\varepsilon} = \ddot{\varepsilon}$$

$$m\ddot{x} = F(x_{eq}+\varepsilon) = -4m\omega_1^2\varepsilon$$

Donc :

$$\ddot{\varepsilon} + (2\omega_1)^2\varepsilon = 0$$

La pulsation est donc $2\omega_1$. Pour plus d'entraînement de ce genre, voir exercices 23, 26 et 27.

2.3 Le ressort

On sait donc que tout système mécanique, au voisinage d'une position d'équilibre stable, est équivalent à un système percevant une force $F(x) = -k(x - x_0)$. Il se trouve que c'est l'équation constitutive d'un ressort.

Propriété 5 : Force de rappel d'un ressort

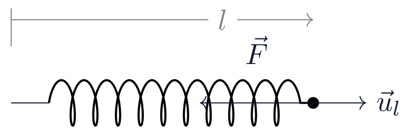
Un ressort exerce une force $\vec{F}$ en fonction de sa longueur l :

$$\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_l \tag{8}$$

Avec $\vec{u}_l$ un vecteur unitaire (de norme 1) parallèle au ressort et orienté dans le sens d'augmentation de la longueur l. k est appelée la constante de raideur du ressort et l_0 est appelée la longueur à vide.

Pour un ressort réel, un ordre de grandeur de k est $50\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ (pour un ressort utilisé en TP).

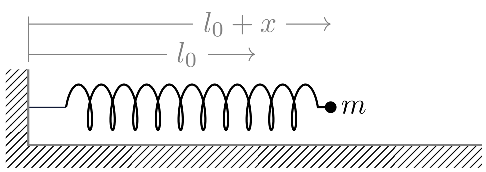
L'oscillateur harmonique est la raison pour laquelle on voit des ressorts partout en mécanique, il s'agit de la linéarisation de la force au voisinage d'une position d'équilibre stable. C'est en particulier la force exercée par un élastique au voisinage de sa position d'équilibre. On parle de force élastique.



On fait quasi-systématiquement l'hypothèse que le ressort est idéal, c'est-à-dire sans masse. En effet, l'expression de la force exercée par un ressort sous-entend qu'à tout moment, il est étiré exactement suffisamment pour compenser la force qu'on applique sur lui : cela suppose qu'il n'ait pas d'inertie. Sinon, la déformation est une onde mécanique qui se propage.

Exemple :

Système masse-ressort :



Une masse m est posée sur une table attachée à un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k. On suppose qu'elle peut glisser sans frottements. L'équation du mouvement est alors, selon x,

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

La pulsation propre est donc $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Si on met la masse à la verticale, l'équation devient alors

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = g$$

Donc la position d'équilibre est alors $x_{eq} = \frac{mg}{k}$.

Pour plus d'entraînement autour du ressort, voir exercices 6 à 11 et 15 à 17.

3 Énergie et oscillateur harmonique

Vous le reverrez en mécanique, mais l'un des théorèmes fondamentaux de la mécanique est le théorème de l'énergie mécanique (TEM). On l'écrit ici dans le cas particulier où les forces sont conservatives. Qu'est-ce qu'une force conservative ? Vous le verrez en mécanique. Ici, on ne s'en soucie pas, car en une seule dimension, si la force dépend de la position uniquement, elle est conservative. On a donc :

$$E_c + E_p = \text{cste} \tag{9}$$

Où

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \tag{10}$$

Et

Définition 1 : Énergie potentielle

$$E_p = -\int^x F(x)dx \tag{11}$$

N'ayez pas peur de l'intégrale ! Pour le calcul, il s'agit uniquement d'une primitive. C'est-à-dire que $\int^x F(x)dx$ est une fonction dont la dérivée vaut $F(x)$. Pour un monôme x^n, une primitive est $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, et la primitive de $\sin(x)$ est $-\cos(x)$. Vous pouvez vérifier que l'on retrouve le PFD en dérivant le théorème de l'énergie mécanique.

On a donc

$$F(x) = -\frac{dE_p}{dx} \tag{12}$$

Cela veut dire que

Propriété 6 : Sens de la force

La force pointe dans la direction de diminution de l'énergie potentielle

Et aussi que l'énergie potentielle est définie à une constante près. Dans la suite, on omettra donc savamment toutes les constantes. Voici les deux énergies potentielles qu'il faut connaître :

Énergie potentielle de pesanteur (pour un axe z orienté vers le haut) :

$$E_{pp} = mgz \tag{13}$$

Énergie potentielle d'interaction élastique :

$$E_{pel} = \frac{1}{2}k(l-l_0)^2 \tag{14}$$

Tout ça pour dire qu'on a une deuxième équation dont la solution est un oscillateur harmonique (notre combinaison de $\cos$ et de $\sin$) :

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2(x-x_0)^2 = \text{cste} \tag{15}$$

Cela n'est pas à connaître, mais il faut simplement se souvenir que lorsqu'on voit une équation de la forme $\dot{x}^2 + \omega^2 x^2 = \text{cste}$, il faut penser à dériver.

Méthode 4 : Équations différentielles quadratiques

Si on a une équation différentielle de la forme

$$\dot{x}^2 + V(x) = \text{cste} \tag{16}$$

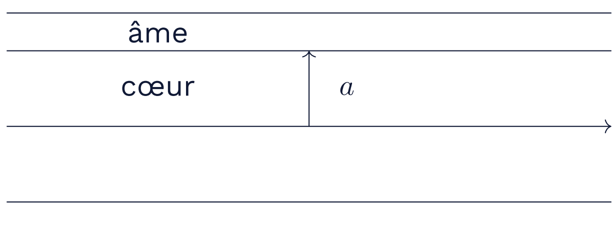
Que l'on sait difficilement résoudre, il faut penser à dériver. C'est le passage entre le TEM et le PFD.

C'est encore une raison pour laquelle l'oscillateur harmonique est extrêmement important en physique : il couple f et f' de manière symétrique. Quand vous étudierez la mécanique analytique, on étudie les coordonnées (p, q), avec p la quantité de mouvement, et q la position. Le couplage entre ces deux variables est symétrique dans l'énergie pour un oscillateur harmonique. Et c'est l'énergie, qu'on appelle le Hamiltonien, qui permet de trouver les équations du mouvement.

Exemple :

Fibre à gradient d'indice :

On se place dans une fibre optique, c'est-à-dire un cylindre constitué d'un cœur transparent et d'une âme réfléchissante :



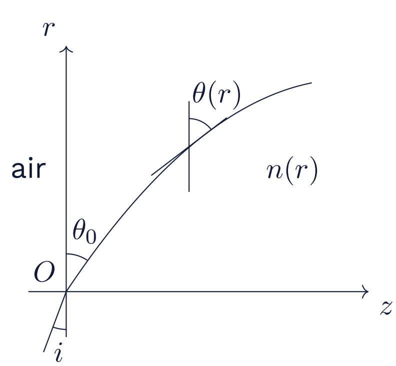
On suppose que l'indice optique varie en fonction de la distance à l'axe central de la façon suivante :

$$n(r) = n_0\sqrt{1 - 2\Delta\frac{r^2}{a^2}} \tag{17}$$

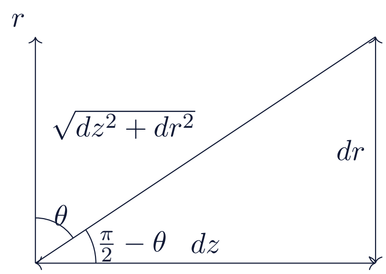
On cherche $r(z)$. On admet la loi de Snell-Descartes en continu :

$$n(r)\sin(\theta(r)) = n_0\sin(\theta_0) \tag{18}$$

On la retrouve en faisant un raisonnement infinitésimal, de proche en proche.



Que vaut $\sin(\theta(r))$? Faisons un schéma.



En appliquant le théorème de Pythagore, on trouve que $\sin(\theta(r)) = \frac{dz}{\sqrt{dz^2+dr^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+r'(z)^2}}$.

L'équation différentielle est donc

$$n(r)\frac{1}{\sqrt{1+r'(z)^2}} = n_0\sin(\theta_0)$$

$$\frac{n(r)^2}{1+r'(z)^2} = n_0^2\sin(\theta_0)^2$$

$$n(r)^2 = n_0^2\sin^2(\theta_0)(1+r'(z)^2)$$

$$n_0^2\left(1-2\Delta\frac{r^2}{a^2}\right) = n_0^2\sin^2(\theta_0)(1+r'(z)^2)$$

$$\sin^2(\theta_0)r'(z)^2 + 2\Delta\frac{r^2}{a^2} = 1-\sin^2(\theta_0)$$

$$r'(z)^2 + \frac{2\Delta}{\sin^2(\theta_0)a^2}r^2 = \frac{\cos^2(\theta_0)}{\sin^2(\theta_0)}$$

Avec $k = \frac{\sqrt{2\Delta}}{\sin(\theta_0)a}$, on retrouve :

$$r'^2 + k^2r^2 = \frac{\cos^2(\theta_0)}{\sin^2(\theta_0)}$$

Donc la solution est de la forme :

$$r(z) = A\cos(kz) + B\sin(kz)$$

On a pour conditions initiales $r(z=0)=0$, $r'^2(z=0) = \frac{\cos^2(\theta_0)}{\sin^2(\theta_0)}$. La solution est donc finalement de la forme

$$r(z) = \frac{\cos(\theta_0)}{k\sin(\theta_0)}\sin(kz)$$

Pour plus d'entraînement autour du lien TEM-PFD, voir exercice 30 et problème 3.

3.1 Énergie, équilibre et stabilité

On a donc un système caractérisé par une énergie potentielle $E_p(x)$ et une force $F(x) = -\frac{dE_p}{dx}$. Toutes nos discussions sur les équilibres s'appliquent ! Il ne reste qu'à transposer tout ça.

Équilibre

Il s'agit donc d'un point d'annulation de la force, donc de la dérivée de l'énergie potentielle. C'est-à-dire :

Propriété 7 : Équilibre et énergie

Un point d'équilibre est un extremum local de l'énergie potentielle.

Stabilité

Supposons que la position d'équilibre soit stable. La force est donc décroissante. Cela veut dire que pour $x > x_{eq}$, $F(x) = -\frac{dE_p}{dx} < 0$, donc l'énergie potentielle est croissante pour $x > x_{eq}$. De même, pour $x < x_{eq}$, $F(x) = -\frac{dE_p}{dx} > 0$ donc l'énergie potentielle est décroissante pour $x < x_{eq}$. Donc

Propriété 8 : Équilibre stable et énergie potentielle

Un point d'équilibre stable est un minimum local de l'énergie potentielle.

De même :

Propriété 9 : Équilibre instable et énergie potentielle

Un point d'équilibre instable est un maximum local de l'énergie potentielle.

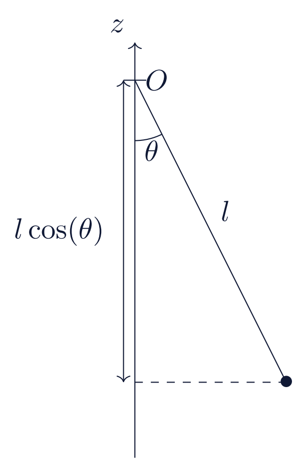
Exemple :

Pendule simple :

L'énergie potentielle du pendule simple est

$$E_p = mgz$$

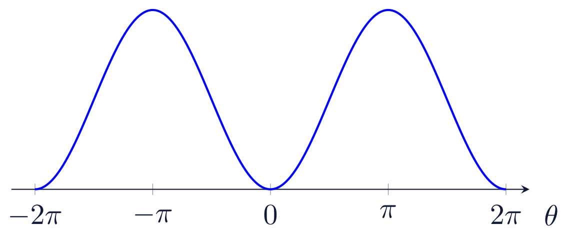
Que vaut z ? Faisons un schéma pour le voir.



Donc $z = -l\cos(\theta)$. D'où :

$$E_p = -mgl\cos(\theta)$$

Représentons cette énergie potentielle :



Énergie potentielle de pesanteur en fonction de θ.

Il y a donc un position d'équilibre instable, $\theta = \pi$, et une position d'équilibre stable (que l'on attendait bien), $\theta = 0$, comme on l'a déjà vu.

Pour plus d'entraînement sur les liens entre énergie est stabilité, voir exercices 18, 24 et 25.

Voisinage d'une position d'équilibre

On a vu qu'au voisinage d'une position d'équilibre, on a

$$F(x) \approx \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x=x_0}(x - x_0)$$

Cela devient, en termes d'énergie potentielle :

$$\frac{dE_p}{dx} \approx \left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x=x_0}(x - x_0)$$

En primitivant une fois, on trouve que l'on a fait le DL à l'ordre 2 de l'énergie potentielle, c'est-à-dire qu'on l'a parabolisée :

$$E_p \approx \frac{1}{2}\left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x=x_0}(x - x_0)^2 \tag{19}$$

Se ramener à l'oscillateur harmonique, c'est linéariser la force, et c'est aussi paraboliser l'énergie potentielle.

Et finalement on a une deuxième condition énergétique pour la stabilité des positions d'équilibre :

Propriété 10 : Stabilité et énergie potentielle

Un point d'équilibre est stable si et seulement si $\left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x=x_{eq}} \geqslant 0$.

Exemple :

Pendule simple :

On se rappelle qu'on a $E_p = -mgl\cos(\theta)$. On fait le DL à l'ordre 2 en voisinage de 0 : $E_p = \frac{1}{2}mgl\theta^2$ (en faisant disparaître la constante). L'énergie cinétique est $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$. Donc l'équation différentielle est :

$$\dot{\theta}^2 + \frac{g}{l}\theta^2 = \text{cste}$$

On retrouve $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Pour explorer le DL à l'ordre 2 de l'énergie potentielle, voir problème 1.

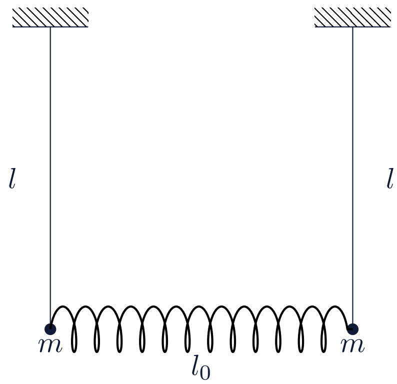
4 Aller plus loin que l'oscillateur harmonique

On va maintenant regarder deux phénomènes qui utilisent l'oscillateur harmonique, en le rendant encore plus riche.

4.1 Oscillateurs couplés

Rien ne sera démontré ici, pour les démonstrations, voir l'exercice 12. Pour une illustration, voir https ://www.youtube.com/watch ?v=YyOUJUOUvso

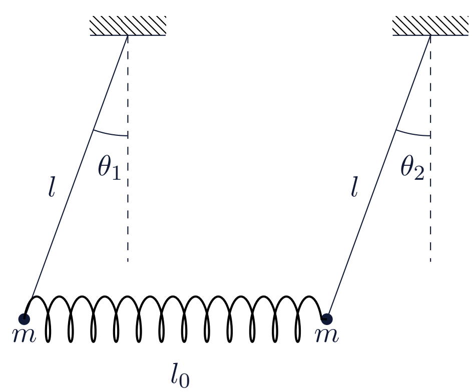
Les oscillateurs couplés tombent au test de présélection, et avoir quelques connaissances dessus peut vous faire gagner énormément de temps. On considère donc deux oscillateurs harmoniques identiques (par exemple deux systèmes masse ressort avec la même raideur et la même longueur à vide, ou deux pendules simples de même longueur). On leur associe donc une pulsation propre ω_0. On les couple à l'aide d'un oscillateur, typiquement un ressort, de raideur k' et de longueur à vide l_0. Exemple :



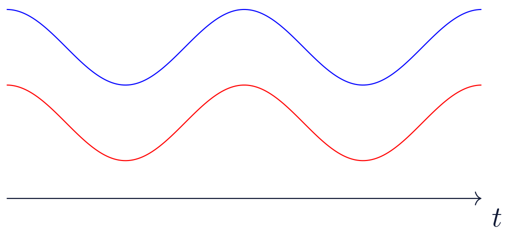
Ce système a 2 modes propres.

Mode symétrique

Il s'agit du mode où, à une constante près, la position de l'oscillateur 1 est égale à la position de l'oscillateur 2 :

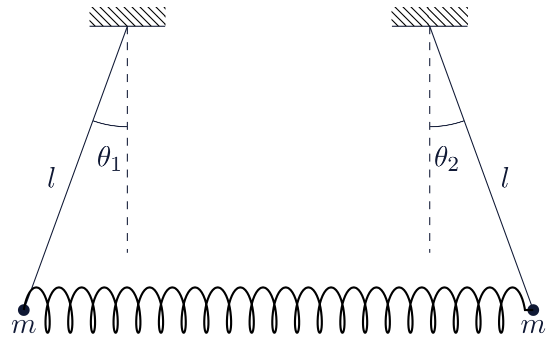


C'est le mode où l'oscillateur de couplage reste à sa longueur à vide. La pulsation de ce mode propre est donc ω_0 : il n'y a pas de transfert d'énergie entre les deux oscillateurs. On prépare ce mode en imposant comme conditions initiales la même différence par rapport à la position d'équilibre pour les deux oscillateurs.

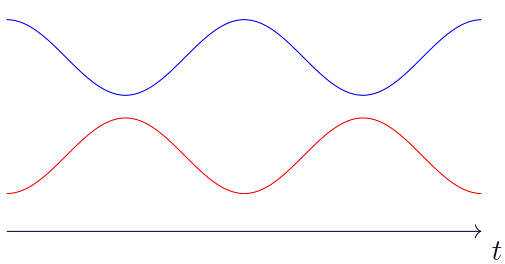


Mode antisymétrique

Il s’agit du mode où, à une constante près, la position de l’oscillateur 1 est l’opposée de la position de l’oscillateur 2 :



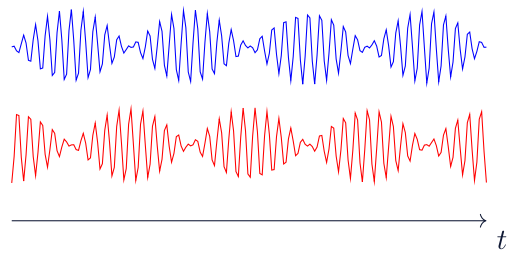
La pulsation de ce mode, ω_1 est nécessairement plus grande qu’ ω_0 : on peut le voir sur cet exemple, quand les pendules s’écartent, le ressort les retient, ce qui diminue le temps d’une période, augmentant ω. Mais plus généralement, la pulsation d’un oscillateur est toujours croissante de la force qu’il subit ($\sqrt{\frac{k}{m}}$ est croissant de k, $\sqrt{\frac{g}{l}}$ est croissant de g), et on impose une force supplémentaire, cela fait donc augmenter la pulsation propre. Sa valeur exacte dépend de la situation. Pour la calculer, on pose les équations du mouvement, puis on les simplifie en supposant que le mode est antisymétrique. Dans ce mode, l’oscillateur de couplage emmagasine périodiquement de l’énergie, puis la rend de manière symétrique aux deux oscillateurs. On prépare ce mode en imposant comme conditions initiales une différence opposée à la position d’équilibre pour chacun des oscillateurs.



La raison pour laquelle on étudie ces deux modes est que la solution générale est une superposition de ces deux modes propres, donc une superposition d’oscillations à ω_0 et à ω_1.

Faible couplage : phénomène de battements

Si le couplage est faible, c’est-à-dire que l’oscillateur de couplage a une pulsation propre très faible devant la pulsation propre des deux autres oscillateurs, la pulsation ω_1 du mode antisymétrique est très proche de ω_0 (quand il y a très peu de couplage, on doit se rapprocher de la situation où il n’y a pas de couplage). La solution générale est donc une somme de deux oscillations proches, ce qui donne lieu à un phénomène de battements.



La fréquence rapide est donc environ ω_0, et la fréquence des battements est $|\omega_1-\omega_0| = \omega_1-\omega_0$, qu'on peut généralement simplifier à l'aide d'un développement limité. On les observe en ne déplaçant initialement qu'un des deux oscillateurs de sa position d'équilibre. Ils sont alors en opposition de phase entre les deux oscillateurs, le ressort permet un transfert d'énergie périodique entre les deux oscillateurs.

Les oscillateurs couplés sont abordés dans les exercices 13 et 14.

4.2 Oscillateur harmonique amorti

Je ne pense pas que la connaissance des solutions exactes soit vraiment dans l'esprit des IPhOs, sachant qu'aux épreuves internationales ils rappellent la solution pour les équations $\ddot{x} - \omega^2 x = 0$, et que c'est vraiment du travail technique de Bac+1. Cependant, l'oscillateur harmonique amorti est mentionné dans le syllabus, il est donc nécessaire d'avoir quelques connaissances qualitatives dessus.

On a dit que l'oscillateur harmonique ne prenait pas en compte les frottements. Nous allons désormais examiner ce qui se passe quand on rajoute un terme de frottements. Pour des mouvements suffisamment lents, on peut considérer les frottements les plus simples possibles, c'est-à-dire des frottements linéaires, en $-\lambda v$. On est donc ramené à l'équation différentielle :

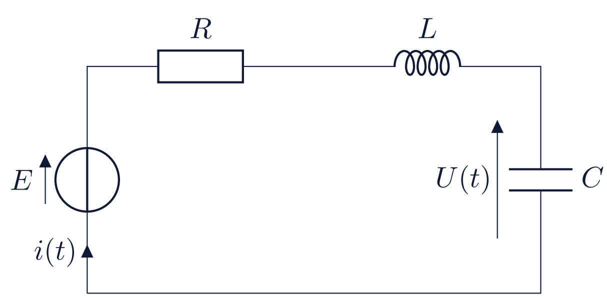
$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (20)$$

Q est appelé le facteur de qualité du système. Plus il est grand, plus on se rapproche de l'oscillateur harmonique. Plus il est faible et plus l'amortissement est fort.

On dit qu'elle est sous forme canonique. Si elle ne l'est pas, on la met sous cette forme.

Exemple :

Le circuit RLC série : On considère le circuit suivant :



L'équation différentielle est :

$$\ddot{U} + \frac{R}{L}\dot{U} + \frac{1}{LC}U = \frac{E}{LC}$$

On remarque tout d'abord que pour $R=0$, le circuit est un oscillateur harmonique. Le circuit LC est un oscillateur harmonique classique qu'il faut connaître (cf le cours d'électrocinétique). On cherche à la mettre sous forme canonique. On voit que $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. On cherche ensuite Q tel que :

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$$

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{L}{R\sqrt{LC}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

On se ramène bien à la forme canonique d'une équation du second ordre.

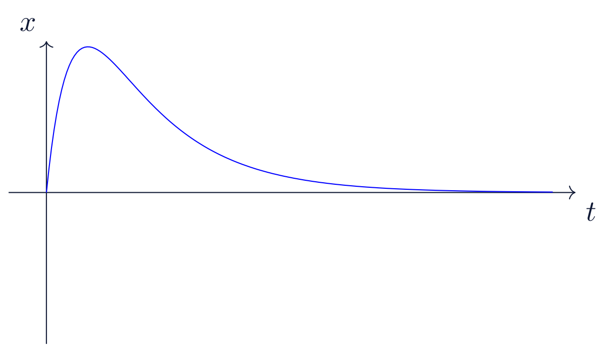
Comme vous le verrez en 5.1.1, pour résoudre l'équation différentielle, il faut résoudre l'équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0 \tag{21}$$

Il y a donc trois régimes, à connaître.

Régime apériodique, $Q < 1/2$

Si $Q < 1/2$, l'amortissement est si fort que le système n'a pas le temps d'osciller. Le régime est donc apériodique.



Les solutions sont les suivantes :

Propriété 11 : Régime apériodique

$$\frac{1}{\tau_{1,2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_0}{Q} \pm \omega_0\sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}\right) > 0 \tag{22}$$

Les solutions sont de la forme :

$$x(t) = Ae^{-t/\tau_1} + Be^{-t/\tau_2} \tag{23}$$

Régime critique, également apériodique, $Q = 1/2$

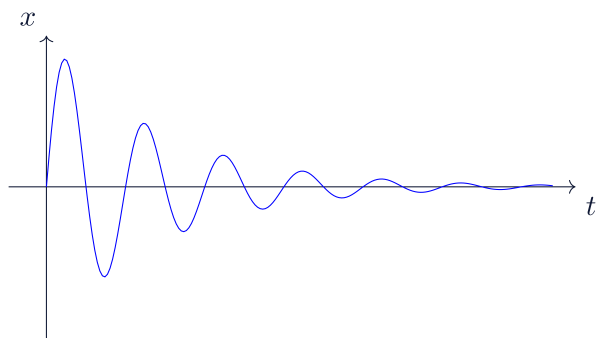
Le régime est également apériodique, la forme mathématique des solutions est simplement différente.

Propriété 12 : Régime critique

$$x(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t} \tag{24}$$

Régime pseudo-périodique, $Q > 1/2$

Si $Q > 1/2$, l'amortissement est suffisament faible pour que le système oscille. Cependant l'amortissement fait tendre la solution vers 0.



Les solutions sont les suivantes :

Propriété 13 : Régime pseudo-périodique

$\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

$\tau = 2Q/\omega_0$

$$x(t) = e^{-t/\tau}(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)) \tag{25}$$

Et maintenant les choses vraiment importantes à connaître :

- Les solutions oscillent à une pulsation $\Omega < \omega_0$, d'autant plus proche de ω_0 que Q est grand. Le terme de frottements ralentit le système, il est donc normale que sa pulsation soit plus faible que sa pulsation sans frottements, et plus l'amortissement est faible, plus on se rapproche de la pulsation sans frottements.
- Le facteur de qualité est de l'ordre de N, le nombre d'oscillations visibles. Par exemple, pour la courbe ci-dessus, $Q \approx 5$.
- Moins important à connaître : pour une estimation plus précise Q, on peut utiliser le décrément logarithmique, $\delta = \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$, avec x_1 et x_2 deux maxima successifs. On a l'approximation $\delta \approx \frac{\pi}{Q}$.

L'oscillateur harmonique amorti est traité dans les exercices 29 et 33.

5 Bonus

Le contenu de cette section est purement pour votre culture, rien n'est à connaître.

5.1 Résoudre une équation différentielle linéaire

5.1.1 Systèmes d'équations linéaires

En 2025 dans le test de présélection français des IPhOs, sujet pour terminales, il fallait résoudre le système d'équations différentielles couplées suivant sur deux intensités électriques

I_1 et I_2 :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2I_1}{dx^2} = \dfrac{I_1}{d_1^2} - \dfrac{I_2}{d_2^2} \\ \dfrac{d^2I_2}{dx^2} = \dfrac{I_2}{d_2^2} - \dfrac{I_1}{d_1^2} \end{cases}$$

Dans le cas $d_1 = d_2 = d$, avec comme conditions aux limites $I_1(0) - I_2(0) = I_1(L) - I_2(L) = I_0$, $I_1(0)+I_2(0) = I_1(L)+I_2(L) = I_0$. On va donc voir quelques méthodes pour résoudre des systèmes d'équations différentielles linéaires couplées dans des cas simples.

Vous remarquerez que quand $d_1 = d_2 = d$, le couplage entre I_1 et I_2 est symétrique ; c'est-à-dire que le contenu de la deuxième équation se déduit de la première en échangeant les rôles de I_1 et I_2 :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2I_1}{dx^2} = \dfrac{I_1}{d^2} - \dfrac{I_2}{d^2} \\ \dfrac{d^2I_2}{dx^2} = \dfrac{I_2}{d^2} - \dfrac{I_1}{d^2} \end{cases}$$

Méthode 5 : Systèmes d'équations différentielles linéaires à couplage symétrique

Dans le cas d'un système d'équations différentielles à couplage symétrique :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2f}{dx^2} = af + bg \\ \dfrac{d^2g}{dx^2} = bf + ag \end{cases}$$

Poser $S = f + g$ et $D = f - g$. Les équations obtenues sur S et D sont alors découplées. Cette méthode fonctionne aussi si le système est d'ordre 1. La présence de constantes dans les équations ne doit pas changer la méthode, cela impliquera simplement des constantes dans les équations différentielles découplées, qui peuvent être traitées comme n'importe quelle équation avec second membre.

Exemple :

Reprenons notre système dans le cas symétrique :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2I_1}{dx^2} = \dfrac{I_1}{d^2} - \dfrac{I_2}{d^2} \\ \dfrac{d^2I_2}{dx^2} = \dfrac{I_2}{d^2} - \dfrac{I_1}{d^2} \end{cases}$$

Soit $S = I_1 + I_2$, $D = I_1 - I_2$.

$$\frac{d^2S}{dx^2} = \frac{d^2I_1}{dx^2} + \frac{d^2I_2}{dx^2} = \frac{1}{d^2}\Big(I_1 + I_2 - I_1 - I_2\Big) = 0$$

$$\frac{d^2D}{dx^2} = \frac{d^2I_1}{dx^2} - \frac{d^2I_2}{dx^2} = \frac{1}{d^2}\Big(I_1 - I_2 - I_2 + I_1\Big) = \frac{2}{d^2}D$$

Donc $S(x) = Ax + b$, $b = I_1(0) + I_2(0) = I_0$, $AL + b = I_1(L) + I_2(L) = I_0$, donc $S(x) = I_0$.

$D(x) = \lambda e^{\sqrt{2}x/d} + \mu e^{-\sqrt{2}x/d}$, $D(0) = \lambda + \mu = I_0$ et $\lambda e^{\sqrt{2}L/d} + \mu e^{-\sqrt{2}L/d} = I_0$. Donc $D(x) = \frac{I_0}{1+e^{-\sqrt{2}L/d}}\Big(e^{-\sqrt{2}x/d} + e^{\sqrt{2}(x-L)/d}\Big)$.

$$I_1(x) = \frac{S(x)+D(x)}{2} = \frac{I_0}{2}\Big(1 + \frac{1}{1+e^{-\sqrt{2}L/d}}(e^{-\sqrt{2}x/d} + e^{\sqrt{2}(x-L)/2})\Big)$$
$$I_2(x) = \frac{S(x)-D(x)}{2} = \frac{I_0}{2}\Big(1 - \frac{1}{1+e^{-\sqrt{2}L/d}}(e^{-\sqrt{2}x/d} + e^{\sqrt{2}(x-L)/2})\Big)$$

Si le système est à couplage antisymétrique, on passe par les complexes :

Méthode 6 : Systèmes d'équations différentielles linéaires à couplage anti-symétrique

Un système à couplage antisymétrique est de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 f}{dx^2} = & bg \\ \dfrac{d^2 g}{dx^2} = & -bf \end{cases}$$

On pose alors $u = f + ig$. On obtient une équation différentielle sur u que l'on peut résoudre avec les méthodes vues plus haut. Cette méthode marche aussi pour les systèmes d'ordre 1.

Exemple :

Particule chargée dans un champ magnétique uniforme :

Si l'on considère une particule de masse m et de charge q dans un champ magnétique $\vec{B}_0 = B_0\vec{u}_z$, les équations du mouvement sont :

$$\begin{cases} \ddot{x} = & \omega_c \dot{y} \\ \ddot{y} = & -\omega_c \dot{x} \end{cases}$$

Et $\dot{z} = \dot{z}_0$, avec $\omega_c = -\frac{qB_0}{m}$

Soit $u = x + iy$. $\ddot{u} = \ddot{x} + i\ddot{y} = \omega_c\dot{y} - i\omega_c\dot{x} = -i\omega_c(\dot{x} + i\dot{y}) = -i\omega_c\dot{u}$.

$$\dot{u}(t) = \dot{u}_0 e^{-i\omega_c t}$$
$$u(t) = \frac{i\dot{u}_0}{\omega_c} e^{-i\omega_c t} + c_0$$

La projection du mouvement dans le plan $z = 0$ est circulaire uniforme de rayon $\frac{v_0}{\omega_c}$, de pulsation ω_c et de centre c_0.

5.1.2 Équations différentielles linéaires d'ordre n à coefficients constants

Propriété 14 : Équations différentielles homogènes à coefficients constants

Si vous avez une équation linéaire homogène (c'est-à-dire sans second membre, avec uniquement des termes en $\frac{d^k f}{dx^k}$) d'ordre n, de la forme

$$\frac{d^n f}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{df}{dx} + a_0 f = 0 \tag{26}$$

les solutions sont de la forme

$$f(x) = \lambda_1 e^{r_1 x} + \cdots + \lambda_n e^{r_n x}$$

avec $r_1, \ldots, r_n$ les racines du polynôme caractéristique $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$.

Cela n'est vrai que si toutes ces racines sont distinctes, mais un peu de topologie et de théorie de la mesure nous permet de dire que les racines sont presque toujours distinctes, c'est-à-dire que la probabilité que ce ne soit pas le cas est nulle. Malgré tout, des cas théoriques peuvent nous amener à devoir prendre en compte ce cas expérimentalement inatteignable.

Il faut donc parler de la multiplicité des racines. Une racine r de P est de multiplicité m si l'on peut factoriser P sous la forme $P = (X-r)^m Q(X)$ où $Q(r) \neq 0$. Une autre caractérisation est que r est de multiplicité m si P et ses $m-1$ premières dérivées s'annulent en r ($P(r) = P'(r) = \cdots = P^{(m-1)}(r) = 0$), et que $P^{(m)}(r) \neq 0$.

Propriété 15 : Formule générale

Si $r_1, \ldots, r_l$ sont les racines du polynôme caractéristique, de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_l$, alors les solutions de l'équation homogène sont de la forme

$$f(x) = \lambda_{1,0}e^{r_1 x} + \lambda_{1,1}xe^{r_1 x} + \lambda_{1,2}x^2 e^{r_1 x} + \cdots + \lambda_{1,m_1}x^{m-1}e^{r_1}x + \lambda_{2,0}e^{r_2 x} + \lambda_{2,1}xe^{r_2 x} + \cdots + \lambda_{l,m_l}x^{m_l - 1}e^{r_l x}$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{l}\sum_{s=0}^{m_l - 1} \lambda_{k,s} x^s e^{r_k x} \tag{27}$$

Ces racines sont souvent complexes, mais ça ne pose aucun problème, on se ramène au cas réel à l'aide des conditions initiales.

Dans le cas de l'oscillateur harmonique, on a

$$r^2 = -\omega^2$$

Donc $r = \pm i\omega$ Ainsi les solutions sont de la forme

$$f(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$$

$$= A(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)) + B(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t))$$

Pour les équations avec second membre, soit

$$\frac{d^n f}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{df}{dx} + a_0 f = g(x) \tag{28}$$

On cherche toujours une solution particulière pour l'additionner à la solution de l'équation homogène. La solution particulière doit être cherchée de la même forme que le second membre : polynôme de degré d si g est un polynôme de degré d, combinaison linéaire de cosinus et sinus si g l'est aussi, un polynôme de degré d fois une exponentielle si g est de cette forme...

Et à la fin, on détermine les constantes avec les conditions initiales sur f et ses dérivées d'ordre 1 à $n-1$.

Exemple :

Résolvons l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^3 f}{dx^3} + \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{df}{dx} - f = \alpha x + 1$$

De conditions initiales $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$.

L'équation homogène associée est

$$\frac{d^3 f}{dx^3} + \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{df}{dx} - f = 0$$

L'équation caractéristique est :

$$r^3 + r^2 - r - 1 = 0$$

$$(r^2 - 1)(r + 1) = 0$$

$$(r - 1)(r + 1)^2 = 0$$

Donc la solution homogène est $f_h(x) = \lambda e^x + (\mu + \nu x)e^{-x}$.

La solution particulière est de la forme du second membre, donc polynômiale d'ordre 1, on prend donc f_p de degré 1. $f_p(x) = ax + b$, on réinjecte f_p dans l'équation différentielle.

$$-a - ax - b = \alpha x + 1$$

$$-ax - (a + b) = \alpha x + 1$$

Donc $a = -\alpha$ et $b = \alpha - 1$. Finalement, $f(x) = f_h(x) + f_p(x) = \lambda e^x + (\mu + \nu x)e^{-x} - \alpha x + \alpha - 1$. On résout ensuite le système posé par les conditions initiales pour trouver λ, μ et ν.

$$\begin{cases} \lambda + \mu & = 2 - \alpha \\ \lambda - \mu \ + \nu & = \alpha \\ \lambda + \mu - 2\nu & = 0 \end{cases}$$

Finalement, on a :

$$\lambda = \frac{\alpha + 2}{4}, \mu = \frac{6 - 5\alpha}{4}, \nu = \frac{2 - \alpha}{2}$$

Le piège de Penning :

On souhaite piéger un électron en $(0, 0)$. Le plus simple serait avec un champ électrique, puisque l'énergie potentielle est alors $E_p = -eV(x, y, z)$. Il suffirait d'avoir un potentiel électrique dont le maximum serait en $(0, 0)$. Cependant les équations de Maxwell, précisément l'équation de Poisson, rendent ce fait impossible. En effet :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Si V admettait un maximum, ce serait un maximum dans toutes les directions, donc il faudrait avoir $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} > 0$ en ce point, ce qui est donc impossible. On veut donc commencer par le piéger dans le plan $z = 0$. On choisit un potentiel de la forme $V(x, y, z) = \frac{V_0}{z_0^2}(x^2 + y^2 - 2z^2)$ (qui respecte l'équation de Poisson) avec $V_0 > 0$. On voit que $(0, 0)$ est un maximum de V dans la direction z. Cela donne une force :

$$\vec{F} = -e\vec{E} = \frac{2eV_0}{z_0^2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ -2z \end{pmatrix}$$

Puisque l'on peut déjà stabiliser l'électron dans la plan $z = 0$, on ne va s'intéresser qu'à x et y. Le piège de Penning consiste à introduire un champ magnétique $\vec{B}_0 = B_0\vec{u}_z$. On obtient alors l'équation différentielle suivante sur $u = x + iy$:

$$\ddot{u} + \omega_c\dot{u} - \omega_0^2 u = 0$$

Avec $\omega_c = -\frac{eB_0}{m_e}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{2eV_0}{z_0^2}}$. L'équation caractéristique est :

$$r^2 + \omega_c r - \omega_0^2 = 0$$

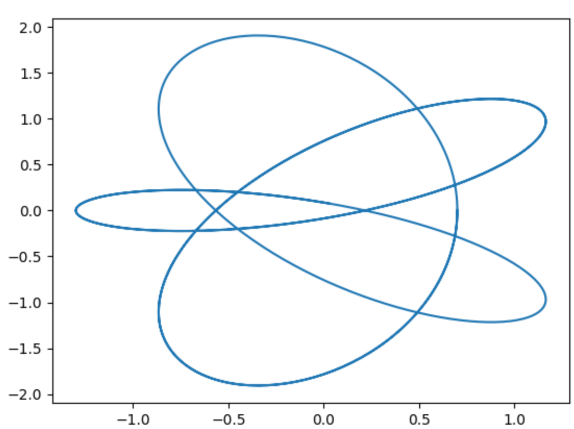
de discriminant : $\Delta = -\omega_c^2 + 4\omega_0^2$. Si $\Delta > 0$, une des racines est $r = \frac{1}{2}(i\omega_c + \sqrt{\Delta})$, de partie réelle strictement positive, donc e^{rt} diverge. Il faut donc, si l'on veut confiner l'électron, avoir $\Delta \leqslant 0$, i.e. $\omega_c \geqslant 2\omega_0$. La solution est donc de la forme :

$$u(t) = \lambda e^{\frac{i}{2}(-\omega_c - \sqrt{|\Delta|})t} + \mu e^{\frac{i}{2}(-\omega_c + \sqrt{|\Delta|})t}$$

On suppose qu'on a comme conditions initiales $u(t = 0) = d_0$ et $\dot{u}(t = 0) = iv_0$. Cela donne le système :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = d_0 \\ \frac{i}{2}(-\omega_c - \sqrt{|\Delta|})\lambda + \frac{i}{2}(-\omega_c + \sqrt{|\Delta|})\mu = iv_0 \end{cases}$$

Que l'on peut résoudre pour obtenir les équations horaires. Il s'agit de la somme de deux rotations, à deux pulsations différentes, possiblement dans deux sens opposés, mais de même centre. L'électron reste donc confiné dans le voisinage de $(0, 0)$, alors même qu'il ne s'agit pas d'un minimum de l'énergie potentielle.



Mouvement d'un électron dans le piège de Penning

5.2 Oscillateur harmonique en mécanique quantique

En mécanique classique, l'énergie d'un oscillateur harmonique est fixée par les conditions intiales, et peut donc aller continûment de 0 à $+\infty$. En mécanique quantique, les niveaux d'énergie sont quantifiés, et valent, pour l'oscillateur harmonique :

$$E_n = \hbar\omega\Big(n + \frac{1}{2}\Big) = h\nu\Big(n + \frac{1}{2}\Big) \tag{29}$$

avec ω la pulsation propre de l'oscillateur (la même qu'en mécanique classique). Ce qu'il est intéressant d'observer est que l'énergie minimale n'est plus 0 mais $\frac{1}{2}h\nu$, qu'on appelle énergie de point zéro. Cette énergie est particulièrement importante. En effet l'une des idées de l'électrodynamique quantique est que le champ électrique est un ressort, ce qui veut dire que même le vide a l'énergie d'un demi photon. C'est par exemple très important pour le calcul de l'effet Casimir, qui décrit la force attractive entre deux plaques conductrices dans le vide.

5.3 Énergie et oscillateur harmonique en 3 dimensions

Supposons que nous ayons une énergie potentielle $E_p(x, y, z)$. La condition d'équilibre est que la force s'annule en un point (x_0, y_0, z_0). Cela veut dire qu'une position d'équilibre est un extremum de l'énergie potentielle. La stabilité vient de la même condition : $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ doit être un minimum de l'énergie potentielle. Mathématiquement, voyons comment cela se traduit. Le DL à l'ordre 2 de l'énergie potentielle s'écrit :

$$E_p(\vec{r}_0 + \vec{h}) \approx E_p(\vec{r}_0) + \vec{\nabla}E_p(\vec{r}_0) \cdot \vec{h} + \frac{1}{2}\vec{h} \cdot H_{E_p}(\vec{r}_0)\vec{h} \tag{30}$$

Où $\vec{h}$ est un petit paramètre, avec

$$\vec{\nabla}E_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_p}{\partial x} \\ \frac{\partial E_p}{\partial y} \\ \frac{\partial E_p}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 E_p}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 E_p}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 E_p}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 E_p}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

$H_{E_p}(\vec{r}_0)$ est donc une matrice, $H_{E_p}(\vec{r}_0)\vec{h}$ se calcule avec les règles du calcul matriciel. Si vous ne l'avez pas vu cela ne fait rien, personne ne vous demande de faire des calculs, tous ces détails sont là pour votre culture uniquement. H_{E_p} est symétrique, car d'après le lemme de Schwarz :

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial_i \partial_j} = \frac{\partial^2 E_p}{\partial_j \partial_i}$$

Le terme $\vec{\nabla}E_p(\vec{r}_0) \cdot \vec{h}$ est d'ordre 1 en $\vec{h}$, et le terme $\frac{1}{2}\vec{h} \cdot H_{E_p}(\vec{r}_0)\vec{h}$ est d'ordre 2 en $\vec{h}$. Pour que $\vec{r}_0$ soit un point d'équilibre, il faut que ce soit un minimum de l'énergie potentielle, ce qui implique que

$$\vec{\nabla}E_p(\vec{r}_0) = 0$$

Cette condition correspond à l'annulation de la force en ce point. Il faut également que pour tout $\vec{h} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{h} \cdot H_{E_p}(\vec{r}_0)\vec{h} > 0$. Cela correspond à ce que $H_{E_p}(\vec{r}_0)$ soit "définie positive", ce qui se démontre en trouvant les racines d'un polynôme :

$$\chi_{H_{E_p}}(\lambda) = \text{det}\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2} - \lambda & \frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 E_p}{\partial y^2} - \lambda & \frac{\partial^2 E_p}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 E_p}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 E_p}{\partial z^2} - \lambda \end{pmatrix}$$

H_{E_p} est définie positive si et seulement si toutes les racines de ce polynôme sont strictement positives. Le théorème spectral nous indique qu'il existe une base orthonormée $(\vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'})$ telle que $H_{E_p}(\vec{r}_0)$ exprimée dans cette base soit diagonale.

$$H_{E_p}(\vec{r}_0) = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}$$

Où k_1, k_2 et k_3 sont les racines de $\chi_{H_{E_p}}$, toutes strictement positives. Le DL de l'énergie potentielle s'écrit alors :

$$E_p(\vec{r}_0 + \vec{h}) = E_p(\vec{r}_0) + \frac{1}{2}(k_1 x'^2 + k_2 y'^2 + k_3 z'^2) \tag{31}$$

Où $\vec{h} = (x', y', z')$ Ce qui donne une force :

$$\vec{F}(\vec{r}_0 + \vec{h}) \approx - \begin{pmatrix} k_1 x' \\ k_2 y' \\ k_3 z' \end{pmatrix} \tag{32}$$

Ce qui donne le système d'équations :

$$\begin{cases} m\ddot{x}' = -k_1 x' \\ m\ddot{y}' = -k_2 y' \\ m\ddot{z}' = -k_3 z' \end{cases}$$

On a donc un oscillateur harmonique à une dimension sur chaque axe du repère, chacun à des pulsations différentes $\omega_i = \sqrt{\frac{k_i}{m}}$, que l'on sait résoudre. On retrouve le cas d'un ressort si l'on suppose que la force est isotrope (la même dans toutes les directions).